

DS N°3 : Rattrapage

Exercice 1 [10pts]

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a strictement positif et on suppose de plus que $a_0 \neq 0$.

1. On suppose que $1/f = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Montrer que :

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{a_0}, \\ b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} ; \forall n \geq 1. \end{cases}$$

2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente et soit r un réel tel que $0 < r < R_a$.

- (a) Montrer qu'il existe un réel $M \geq 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.
 (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|b_n| \leq \frac{M(M+1)^n}{r^n}$$

- (c) En déduire que le rayon de convergence R_b de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est strictement positif.
 3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Exercice 2 [10pts]

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Prouver que la série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \cos(\alpha t)$ pour $t \in [-\pi, \pi[$, et prolongée par 2π -périodicité est :

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos(nt) \right)$$

2. En déduire que :

$$\cotan(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

3. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2} \right)$ converge pour tout $t \in]-1, 1[$. On note, pour $t \in]-1, 1[$, $g(t)$ la somme de cette série. Prouver que g est une fonction de classe C^1 , et calculer g' .

4. En déduire que, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a :

$$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{k^2} \right)$$